Prop: $P \in R$-mod

1. P é livre e de card. finita
2. P é projetivo e f.g.
3. P é plano e f.a.

Temos $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$. Adicionalmente, se R é local então $1. \Leftrightarrow 2. \Leftrightarrow 3.$

Dem: $1. \Rightarrow 2.$ ✓

$2. \Rightarrow$ P plano e f.g. Seja

$$0 \to K \to R^n \to P \to 0$$

exata. P proj. $\Rightarrow$

$$R^n = K \oplus P$$

$$\Rightarrow K = R^n / P \text{ é f.g.}$$

$$\Rightarrow P \text{ é f.a.}$$

$\therefore 2. \Rightarrow 3.$ ✓

Suponhamos R é local com ideal maximal m

$\Rightarrow P/mP$ é

um esp. vetorial / $\underset{K}{\underset{\shortparallel}{R/m}}$ (corpo)

Temos

$$\dim_K P/mP$$

$=$ nº mínimo de geradores de P

Seja n este nº e consideremos

$$R^n \twoheadrightarrow P$$

$\rightsquigarrow$ obtemos

$$0 \to \mathbb{K} \to R^n \to P \to 0$$

$\Rightarrow$

$$0 \to \mathbb{K}/m\mathbb{K} \to \overset{K^n}{\overset{\shortparallel}{R^n/mR^n}} \to P/mP \to 0$$

é exata $\quad \mathbb{K}\otimes R/m \quad R^n\otimes R/m \quad P\otimes R/m$

$$\therefore \quad K^n = P/mP \oplus \mathbb{K}/m\mathbb{K}$$

soma direta de esp. vet / K.

$\dim_k P/mP = n \rightarrow \dim_k \mathbb{K}/m\mathbb{K} = 0$

$\Leftrightarrow \mathbb{K} = m\mathbb{K}$

$\Rightarrow \mathbb{K} = 0$

$\therefore$ P é livre de caract. finita.

$\therefore$ 3 $\Rightarrow$ 1. $\square$

<u>**Def**</u>: <u>Homomorfismos Locais</u>. A, B anéis locais com ideais maximais m e n. Dado $\varphi \in \mathrm{Hom}(A,B)$, ASASE:

1. $\varphi^{-1} n = m$
2. $1 \notin mB$
3. $mB \subset n$.

Quando se verificam, diz-se que φ é um <u>homomorfismo local</u>.

Dem: 1. $\Rightarrow$ 2.

$$\varphi^{-1}\mathfrak{m} = \mathfrak{m} \Rightarrow \mathfrak{m}B \subset \mathfrak{m} \Rightarrow 1 \notin \mathfrak{m}B$$

2. $\Leftarrow$ 3. $\quad 1 \notin \mathfrak{m}B \Leftarrow \mathfrak{m}B \subsetneq B$ $\subsetneq$
$\mathfrak{m}B \subset \mathfrak{m}$

3. $\Rightarrow$ 1.

$$\mathfrak{m}B \subset \mathfrak{m} \Rightarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{m}B) \subset \varphi^{-1}\mathfrak{m}$$
$$\Rightarrow \mathfrak{m} \subset \varphi^{-1}\mathfrak{m}$$
$$\Rightarrow \mathfrak{m} = \varphi^{-1}\mathfrak{m}$$

pq $\mathfrak{m} \subset A$ é único ideal maximal

e $\varphi^{-1}\mathfrak{m} \subsetneq A$ pq é primo.

$\square$

Exemplos: 1. $K[x]_{\langle x \rangle} = \left\{ \dfrac{f(x)}{g(x)} \,\middle|\, f, g \in K[x] : x \nmid g(x) \right\}$

$A = K[x]_{\langle x \rangle}$ é local com ideal maximal $\mathfrak{m} = \left\{ \dfrac{x f(x)}{g(x)} \,\middle|\, f, g \in K[x] \; x \nmid g \right\}$

$B = K(x) = \{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f, g \in K[x],\ g \neq 0 \}$

$\varphi : A \hookrightarrow B$ inclusão

B é anel local pq é corpo

$m = \langle 0 \rangle$

$\varphi^{-1} \langle 0 \rangle = \langle 0 \rangle \neq m$

$\therefore \varphi$ não é homomorfismo local

2. $A = B = K[x]_{\langle x \rangle}$

$\varphi : x \longmapsto x^2$

φ é local.

Extensões de Anéis:

Def: Uma R-álgebra R' diz-se R-finita se R' é f.g. como R-módulo

NB: Tb dizemos que R' é R-álgebra finita.

Um elemento $x \in R'$ diz-se que é integral $/R$ se $\exists a_1, \ldots, a_n$, para algum n t.q.

$$\boxed{x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0}$$

Se $x \in R'$ é integral $/R$ $\forall x \in R'$, dizemos que R' é integral $/R$.

Exemplo: 1. $\mathbb{C}$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra finita.

2. $\mathbb{R}[x]$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra finitamente gerada (como álgebra) mas não é uma $\mathbb{R}$-álgebra finita pois $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x] = \infty$.

3. Se R é um anel então

$$R' := R[x] / \langle F(x) \rangle ,$$

com $F(x) \in R[x]$ mônico, é finita:

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_0$$

$\Longrightarrow$ R' é gerado como R-módulo por $\kappa(1), \kappa(x), \kappa(x^2), \dots, \kappa(x^{n-1})$

NB: $\mathbb{R} \simeq \mathbb{C}[x] / \langle x^2+1 \rangle$

Notação: Se R' é R-alg. e $x \in R'$, denotamos por $R[x] \subset R'$ a R-subálgebra de R' gerada por x.

Prop: $R' \supseteq R$ alg. $x \in R'$. ASASE

(1) x satisfaz $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, $a_i \in R$

(2) $R[x]$ é gerado por $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ como R-módulo

(3) $x \in R'' \subset R$ subálgebra t.q. R'' é gerado por n elementos como R-módulo

(4) $\exists$ $R[x]$-módulo fiel M gerado $/R$ por n elementos.

NB: Daqui segue que se R' é R-álgebra finita, então R' é integral $/R$.

Dem: (1) $\Rightarrow$ (2) ✓

(2) $\Rightarrow$ (3) ✓

(3) $\Rightarrow$ (4) ✓

(4) $\Rightarrow$ (1) Aplicamos CH com $\varphi := \mu_x \in \operatorname{End}(M)$

$\Rightarrow \exists a_i \in R$ t.q.

$$\varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

M fiel $\Rightarrow$ $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ em $R[x]$.

$\boxed{K_2}$

<u>Prop</u>: $P := R[X]$, $\mathfrak{U} \subset P$ ideal;
$R' := P/\mathfrak{U}$, $\kappa : P \twoheadrightarrow P/\mathfrak{U}$, $x = \kappa(X)$.

~~ASASE~~.

(1) $\mathfrak{U} = \langle F(X) \rangle$ com $F(X)$ mônico com grau n

(2) $M := \sum_{i=0}^{n-1} RX^i \subset P$, $\varphi = \kappa|M$
então $\varphi : M \xrightarrow{\sim} R'$

(3) $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ é uma base para R' como R-módulo

(4) R' é livre de caret. n como R-módulo

Dem: (1) $\Rightarrow$ (2)

(4) $\Rightarrow$ (1) Segue CH aplicado a $\varphi = \mu_x \in \mathrm{End}(R')$

obter $F(x)$ mônico de grau n t.q.

$$F(x) \in u \Rightarrow \frac{R[x]}{\langle F(x) \rangle} \longrightarrow R'$$

$\square$

Exemplo: $R' = \mathbb{Z}[x]/\langle x^2+1, 3 \rangle$

é uma $\mathbb{Z}$-álgebra finita mas não um $\mathbb{Z}$-módulo livre

$$R' = \mathbb{Z}/\langle 3 \rangle [x]/\langle x^2+1 \rangle$$

Lema: Sejam R' = R-alg finita e $M \in R'$-mod f.g. Então M é R-mod f.g.

Se $M \simeq (R')^r$ e $R' \simeq R^{r'}$, então $M \simeq R^{rr'}$.

Teorema (Leis de indução / torre): $R' \in$ R-alg., $R'' \in R'$-alg, $x \in R''$. Temos

(1) x integral $/R'$ e R' é integral $/R \Rightarrow x$ int. $/R$

(2) R'' int. $/R'$ e R' int. $/R \Rightarrow R''$ int. $/R$

(3) R'' finito $/R'$ e R' finito $/R \Rightarrow R''$ finito $/R$

Dem: (1) x int. $/R' \Rightarrow \exists n, b_1, \dots, b_n \in R'$ t.q.

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n = 0$$

$\Rightarrow R[x] \subset R'$ f.g como $R[b_1, \dots, b_n]$ - módulo

de $R[b_1, \dots, b_n] = R[b_1][b_2, \dots, b_{n-1}]$

vem, por indução em n, que $R[b_1, \dots, b_n]$ é f.g. como R-módulo.

Def: Seja R' e R-alg. Define-se o fecho íntegro de R em R' como

$$\overline{R} = \{ x \in R' \mid x \text{ é integral } / R \}$$

NB: $\overline{R} \subset R'$ é uma R-subálgebra:

$x, y \in \overline{R}$

$\Rightarrow R[x,y] = R[x][y]$

$\Rightarrow R[x,y]$ finita $/ R$

$\Rightarrow x+y, \ xy \in \overline{R}$

Def: $R = \overline{R}$ diz-se que R é integralmente fechado em R'.

Exemplo: $\mathbb{Z}$ é integralmente fechado em $\mathbb{Q}$.

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

com $r \in \mathbb{Q}$ e $a_i \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow r \in \mathbb{Z}$

$r = \frac{p}{q}$, $(p,q) = 1$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1 \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

$$\Rightarrow p^n + a_1 p^{n-1} q + \cdots + a_n q^n = 0$$

$$\Rightarrow q \mid p^n \Rightarrow q = 1$$

<u>Exemplo</u>: Se R é DFU então R é integral/ fechado em $\mathrm{Frac}(R)$.

<u>Def</u>: Se R é domínio, consideremos o seu fecho integral $\overline{R}$ em $\mathrm{Frac}(R)$. Chamamos a $\overline{R}$ a <u>normalização</u> de R. Se $R = \overline{R}$, diz-se que <u>R é normal</u>.

Exemplo: R DFU $\Rightarrow$ R normal

Exemplo: $K =$ corpo. $R := K[T^2, T^3] \subset K[T]$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Frac}(R) = K(T)$

Temos $T \in \mathrm{Frac}(R)$ é integral $/R$

pq é raiz de
$$x^2 - T^2 \in R[x]$$

$$\therefore \quad \overline{R} = K[T]$$

$\therefore$ A normalização de $K[T^2, T^3]$

é $K[T]$.

NB: $K[T^2, T^3] \cong K[x,y] / \langle x^3 - y^2 \rangle$

$$x \mapsto T^2$$
$$y \mapsto T^3$$

Localização de anéis: R anel $S \subset R$ um conj. mult.

Def: S diz-se saturado se $xy \in S \Rightarrow x, y \in S$

Exemplo: 1. $s \in R$, $S = \{1, s, s^2, \ldots\}$ é multiplicativo, mas não necessariamente saturado.

2. $\mathfrak{p} \subset R$ ideal primo $\Rightarrow R = S - \mathfrak{p}$ é mult.

3. $S_0 = \{x \in R - 0 \mid x\,\bar{\pi}$ é divisor de $0\}$

S_0 é mult. e saturado

Def: Localização de R em S (m.t.)

$$S^{-1}R := R \times S / \sim$$

onde $(r, s) \sim (r', s') \iff$

$$\exists s'' \in S : s''(rs' - r's) = 0$$

classe de eq. de (r, s) denotamos $\frac{r}{s}$

Operações

$$\frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'} := \frac{rr'}{ss'}$$

$$\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} := \frac{rs' + r's}{ss'}$$

Com estas operações $S^{-1}R$ é um anel e temos um homo. $\varphi_S : R \to S^{-1}R$

$$x \longmapsto \frac{x}{1}$$